* 学术论文 *

广义混合变分原理及其有限元法*

党发宁 李 宁 荣廷玉
西安理工大学岩土工程研究所，西安 710048 西南交通大学应用力学与工程系，成都 610031

摘要 将传统的变分原理划分为3大类型，指出它们的共同之处是泛函中的能量项是固定的；分析了用传统变分原理建立的5大类有限元模型，它们的刚度都是固定的，计算时经常会发生病态现象，需要建立刚度可以调整的新模型．广义混合变分原理的特点是其泛函中位能和余能所占的比例可以调节，用它建立的有限元广义混合模型的刚度也可以调节，能灵活适应弹性体刚度复杂多变的需要，给出了其中分裂因子的选择方法，最后通过算例研究了其克服病态问题的能力．

关键词 变分原理 有限元 分裂模量 分裂因子 病态问题

弹性静力学的一个基本问题是如下的数学物理边值问题，要寻求3类场变量即位移矢量 $\boldsymbol{u}_i$，应变张量 $\boldsymbol{e}_{ij}$ 和应力张量 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 满足平衡方程

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij,j}+\overline{\boldsymbol{F}}_i=0,\qquad 在\ V\ 内,\quad (1)$$

几何方程

$$\boldsymbol{e}_{ij}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_{i,j}+\boldsymbol{u}_{j,i})=0,\qquad 在\ V\ 内,\quad (2)$$

物性方程

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}-\boldsymbol{S}_{ijkl}\boldsymbol{e}_{kl}=0\ 或\ \boldsymbol{e}_{ij}-\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{kl}=0,\ 在\ V\ 内,\quad (3)$$

以及位移边界条件

$$\boldsymbol{u}_i-\overline{\boldsymbol{u}}_i=0,\qquad 在\ S_u\ 上,\quad (4)$$

和应力边界条件

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j-\overline{\boldsymbol{p}}_i=0,\qquad 在\ S_p\ 上.\quad (5)$$

其中，V 是弹性域，$S=S_u+S_p$ 为其界面，在 S_u 上给定位移 $\overline{\boldsymbol{u}}_i$，在 S_p 上给定面力 $\overline{\boldsymbol{p}}_i$．$\overline{\boldsymbol{F}}_i$ 是给定的体力．$\boldsymbol{n}_i$ 是 S 的单位外法矢．$(\ldots)_{,j}$ 表示对 x_j 的偏导数．$\boldsymbol{S}_{ijkl}$ 和 $\boldsymbol{C}_{ijkl}$ 分别代表弹性张量和柔性张量，是材料常数．δ_{ij} 是 Kronecker 符号．

力学变分解法从另一个角度解答问题，先建立一个泛函，它依赖于场变量 $\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{e}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$，该泛函的极值或驻值与上述边值问题完全相同，用该理论可以建立问题的数值解法．在工程力学问题的各种数值解法中，有限元法是一种简单而有效的方法，有限元技术的发展促成了变分原理研究的深化．

1 弹性力学的3类传统变分原理

根据泛函中所含场变量数目的多寡将传统变分原理划分为3大类型．

类型I 单一场变量型的变分原理

这一类型中有两个基本变分原理，即最小势能原理和最小余能原理[1]，其泛函分别用 $\prod_p$ 和 $\prod_c$ 表示如下

$$\prod\nolimits_p=\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ijkl}\boldsymbol{e}_{ij}\boldsymbol{e}_{kl}-\overline{\boldsymbol{F}}_i\boldsymbol{u}_i\right)\mathrm{d}V-\int_{S_p}\overline{\boldsymbol{p}}_i\boldsymbol{u}_i\mathrm{d}S,\quad (6)$$

其泛函受(2)和(4)式的约束，独立变量为 $\boldsymbol{u}_i$．

$$\prod\nolimits_c=\int_V\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_{kl}\right)\mathrm{d}V-\int_{S_u}\overline{\boldsymbol{u}}_i\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j\mathrm{d}S,\quad (7)$$

其泛函受(1)和(5)式的约束，独立变量为 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$．

类型II 二类场变量混合型的变分原理

这一类型中的代表是著名的 Hellinger-Reissner 原理[2,3]，泛函为 $\prod_{HR}$

$$\prod\nolimits_{HR}=\int_V\Big[\boldsymbol{\sigma}_{ij}D_{ij}-\frac{1}{2}\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{\sigma}_{kl}-\overline{\boldsymbol{F}}_i\boldsymbol{u}_i\Big]\mathrm{d}V-T_p,\quad (8)$$

2001-06-05 收稿，2001-08-07 收修改稿
* 国家自然科学基金(批准号：19772039)与博士后科学基金联合资助项目

独立变量为 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{u}_i$. 另一与之对应的代表性变分原理的泛函为 $\prod_{\mathrm{ED}}$[4]，其独立变量为 $\boldsymbol{e}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{u}_i$. 其中

$$\boldsymbol{D}_{ij} \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{u}_{i,j} + \boldsymbol{u}_{j,i}), \tag{9}$$

$$T_p \equiv \int_{S_u} (\boldsymbol{u}_i - \bar{\boldsymbol{u}}_i)\boldsymbol{\sigma}_{ij}\boldsymbol{n}_j \mathrm{d}S + \int_{S_p} \bar{\boldsymbol{p}}_i \boldsymbol{u}_i \mathrm{d}S. \tag{10}$$

类型 III 三类场变量混合型的变分原理

此类代表是胡海昌[5]-Washizu[6]变分原理，泛函为 $\prod_{\mathrm{HW}}$

$$\prod_{\mathrm{HW}} = \int_V \Big[\frac{1}{2}\boldsymbol{S}_{ijkl}\boldsymbol{e}_{ij}\boldsymbol{e}_{kl} - \boldsymbol{\sigma}_{ij}(\boldsymbol{e}_{ij} - \boldsymbol{D}_{ij}) - \bar{\boldsymbol{F}}_i\boldsymbol{u}_i\Big]\mathrm{d}V - T_p, \tag{11}$$

与其对应的另一变分原理的泛函是 $\prod_{\mathrm{RT}}$[4]，它们都以 $\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{e}_{ij}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{ij}$ 为独立变量.

关于传统型变分原理的发展，钱伟长[7]，胡海昌[8]，牛庠均[9]等曾做过大量工作. 这些传统变分原理的泛函中的能量项都是固定的.

2 建立更新广义变分原理的必要性

按独立插值函数的不同，已有的有限元方法大体上可分为5种类型.

(1) 以最小势能原理为基础，根据位移场在整个计算域内连续的假定而建立的协调模型，其实质是让结构在有限个结点上拥有自由度代替真实结构在整个弹性域无穷多点上所拥有的自由度，由于自由度的减少使得这种模型较真实模型偏硬，给出的位移数值解是真解的下界.

(2) 以最小余能原理为基础，在单元内假设平衡应力场而建立的平衡模型，其实质是用结构在有限个单元上满足平衡条件代替其在任意局部满足平衡条件，由于放松了对结构的约束，所以这种模型较真实模型偏软，给出的位移数值解是真解的上限[10].

当最大单元尺寸趋向于零时，这两种模型的数值解在理论上应从上、下两侧趋于真解. 这反映出有限元体系中，应变能成分是使模型偏硬的因素，余能成分则使模型偏软. 图1是以正方形截面直杆扭转问题为例，分别用有限元协调模型、平衡模型及解析法计算的结果.

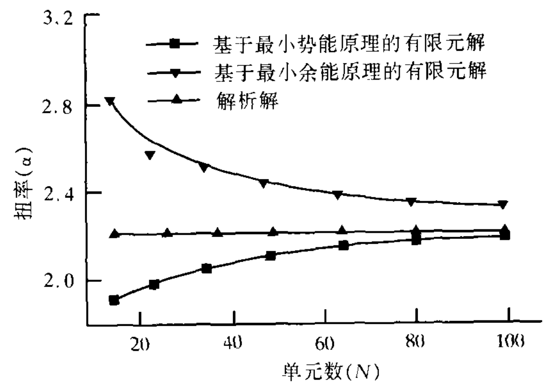

图1 有限元平衡模型和位移模型解

(3) 以广义变分原理为基础，除在每个单元内部假设平衡的应力场外，沿单元的邻界还假设协调的位移函数而建立的杂交模型.

(4) 独立函数既包含单元内部的位移，又包含单元内部的应力，以广义变分原理为基础建立的混合有限元模型.

(5) 杂交-混合模型.

由于传统混合变分原理的泛函中应变能和余能成分的混合比例是固定的，因此用它们建立的有限元的刚度是固定的，计算精度随单元划分的确定也是固定的，它们的数值解应介于协调模型和平衡模型之间，但未必一定比协调模型和平衡模型的精度都好，可见有限元混合模型并非最好的模型. 要做出性能最好的可以克服病态问题的有限元模型，关键是要控制好泛函中应变能和余能成分的混合比例，对变分原理提出了更高的要求.

3 第IV类变分原理及其泛函的特点

1981年荣廷玉[11]提出了建立变比例混合能量型泛函的条件：(1) 其中应同时包含应变能和余能成分；(2) 两种能量成分所占的比率可以调节；(3) 至少含有一个可以用来调节两种能量成分所占比率的参变量函数. 并建立了线弹性理论的分裂模量变分原理，也称为广义混合变分原理(General mixed variational principles, GMVP). 文献[12, 13]将其推广到大位移非线性理论中，且证明了已经建立的许多变分原理都是它的特例.

类型 IV 广义混合变分原理

其中最简单、最实用且具有代表性的泛函为 $\prod_{2p\beta}^{(1)}$

$$\prod\nolimits_{2p\beta}^{(1)} = \int_V \Big[\frac{1}{2}\beta S_{ijkl} D_{ij} D_{kl} - \frac{1}{2}(1-\beta) C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} + (1-\beta)\sigma_{ij} D_{ij} - \overline{F}_i u_i\Big] \mathrm{d}V - T_{\sigma\beta}, \tag{12}$$

其中

$$T_{\sigma\beta} \equiv \int_{S_u} (u_i - \overline{u}_i)[\beta\sigma_{ij} + (1-\beta) S_{ijkl} D_{kl}] n_j \mathrm{d}S + \int_{S_p} \overline{p}_i u_i \mathrm{d}S, \tag{13}$$

该泛函以 u_i 和 σ_{ij} 为独立变量，β 是分裂因子.

不难看出，$\prod_{2p\beta}^{(1)}$ 既包含应变能成分 $\frac{1}{2}\beta S_{ijkl} \cdot D_{ij} D_{kl}$，也包含余能成分 $\frac{1}{2}(1-\beta) C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$，而且两者的比例可以通过参数 $\beta(x_i)$ 任意调节．如果在 V 内和 S 上令 $\beta=1$，且在 S_u 上 $u_i=\overline{u}_i$，则 $\prod_{2p\beta}^{(1)}$ 变为最小势能原理的泛函 $\prod_{\mathrm{p}}$；在 V 内若令 $\beta=0$，且在 S 上令 $\beta=1$，σ_{ij} 满足平衡条件，则它变为最小余能原理的泛函 $\prod_{\mathrm{C}}$．β 的其他值可给出更有利的泛函，以建立精度更高的有限元模型.

GMVP 在理论和应用上与传统型变分原理都不等价．一方面其泛函的 Euler 方程与传统型泛函的 Euler 方程等价且等于弹性力学基本方程，如 $\prod_{3p\beta}^{(1)}$[4] 与 $\prod_{\mathrm{HW}}$ 的 Euler 方程等价，这是必须的．但 GMVP 的泛函与传统泛函并不等价，这正如两个普通函数有相同的驻点但函数本身并不等价一样．事实上，$\prod_{3p\beta}^{(1)}$ 是空间(u_i，e_{ij}，σ_{ij})中以分裂因子 β 为参数的一条曲面(线)，而 $\prod_{\mathrm{HW}}$ 等传统泛函只是该曲面(线)上的一个点．而且 GMVP 泛函的 Euler 方程也是以分裂因子为参数的一条曲线，而传统者只是该曲线上的一个点，前者蕴涵后者；另一区别是 GMVP 泛函中的两种能量的混合比例是可变的，有限元模型的刚度是可调的.

4 广义混合有限元法及其特点

用 GMVP 建立有限元的方法称为分裂模量法，也称为有限元广义混合法(General mixed finite elements method，GMFEM)．称固定刚度有限元模型为常规有限元模型．GMFEM 单元混合刚度矩阵的一般形式为

$$k_e = \begin{bmatrix} \beta k_u & (I-\beta) k_{u\sigma} \\ (I-\beta) k_{\sigma u} & (I-\beta) k_\sigma \end{bmatrix}, \tag{14}$$

其中分裂因子 β 是坐标位置的函数或函数的矩阵．该单元混合矩阵与常规位移元、平衡元以及常规混合有限元的单元矩阵都不同．GMFEM 的单元混合矩阵由刚性矩阵部分 βk_u、柔性矩阵部分 $(I-\beta)k_\sigma$ 和两个交叉项 $(I-\beta)k_{u\sigma}$ 与 $(I-\beta)k_{\sigma u}$ 组成．刚性矩阵 βk_u 中令 $\beta=I$(其中 I 是单位矩阵，下同.)，则转化为位移元的刚度矩阵，是使模型偏硬的因素；柔性矩阵 $(I-\beta)k_\sigma$ 中令 $\beta=0$(其中 0 是零矩阵)，则转化为平衡元中的柔度矩阵，是使模型偏软的因素．GMFEM 单元混合矩阵的最大特点是其中含有可以改变刚性和柔性矩阵所占比例的任意参数 β，从而调整模型刚度，降低刚度矩阵的谱条件数，提高解的精度，克服常规有限元中所存在的病态问题，使其解更接近于弹性体的真实变形.

5 选择分裂因子的方法

文献[12]给出了选择分裂因子的一般准则，即弹性理论中任一待求的量(可以是位移、应力、应变等)对分裂因子 β 的偏变分等于零.

刚度矩阵的谱条件数 $C(K)$ 是判断有限元是良态还是病态的较通用准则，谱条件数越小计算精度越高，说明矩阵是良态的．为了叙述方便，不妨将 GMFEM 单元混合矩阵的分裂因子 β 当成一个变数，并记为 β．结构总体矩阵 K 当然也是含有分裂因子的混合矩阵，设它是 n 阶的，其特征方程为

$$\left|\lambda I - K\right| = 0. \tag{15}$$

可见(15)式的左手项是以分裂因子 β 为系数的 n 次多项式．设特征方程的绝对值最大根是 $|\lambda|_{\max}$，绝对值最小根是 $|\lambda|_{\min}$．要提高 GMFEM 解的精度，就是要寻求恰当的分裂因子的值，使得刚度矩阵谱条件数(β 的函数)的值达到最小，即

$$\delta_\beta C(K) = \delta_\beta \frac{|\lambda|_{\max}(\beta)}{|\lambda|_{\min}(\beta)} = 0. \tag{16}$$

6 克服病态问题研究

GMFEM 自诞生以来，一直用于克服病态问题的研究．文献[14]建立了正交各向异性平面问题的 GMFEM，文献[15]建立了薄板问题的 GMFEM，

文献[16]建立了 Reissner 板问题的 GMFEM, 这些模型均不发生病态, 文献[14～16]也从理论上分析了其克服各类病态问题的机理. 文献[17]建立了不可压缩问题的 GMVP 及其 GMFEM, 验证了 Hermann[18]的变分原理及有限元是其分裂因子 $\beta=0$ 时的特例. 下面是一个杆件系统的算例.

算例 如图2由3个杆单元组成的简单超静定结构, 第2个结点处作用有载荷 p. I, III 号杆元的弯曲刚度 $\frac{EA}{L}$ 为 1.0, II 号杆元的弯曲刚度为 1.0×10^{10}, 两类单元的刚度相差很大, 这时结构刚度矩阵的谱条件数为 2×10^{10}, 是病态谱条件数. 如果用常规有限元法去计算, 确实发生了严重的病态.

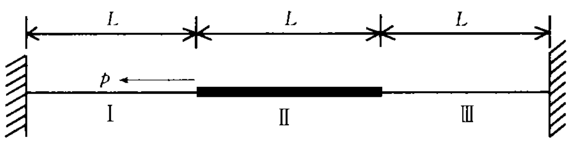

图2 3杆单元组成的简单超静定结构

现在用 GMFEM 去计算, 单元 I, III 的分裂因子取为 0.01 不变, 单元 II 的分裂因子在 $-5\sim5$ 之间变化, 如图3是谱条件数的对数随分裂因子 β 的变化规律. 事实上当 β 在 1.0×10^{-12} 附近时, 谱条件数降到最低点 3.22, 而且此时 GMFEM 的位移解也恰好最接近于真解.

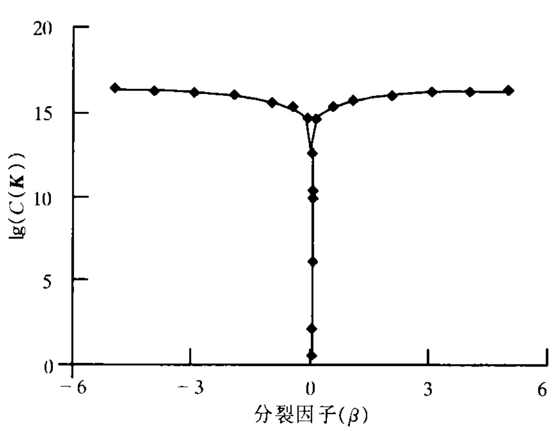

图3 谱条件数的对数与分裂因子的关系

若令 II 号杆元的刚度在 $1.0\sim1.0\times10^{30}$ 之间变化, 其他参数保持不变, 分别用常规结构分析程序和 GMFEM 计算, 杆元 II 刚度的对数与谱条件数对数的关系见图4. 随着单元 II 刚度的增大, 常规结构分析刚度矩阵的谱条件数增加很快, 而且其解很不稳定, GMFEM 给出的谱条件数则很小且其解很稳定.

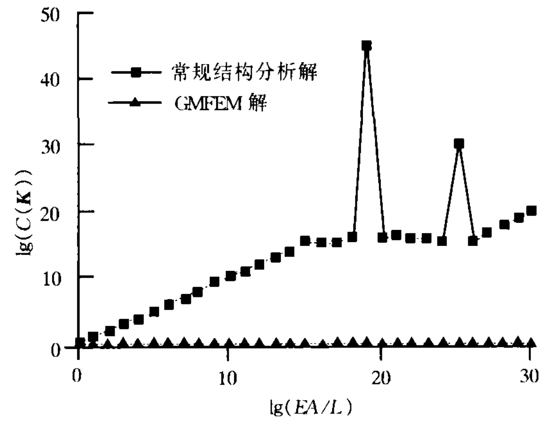

图4 谱条件数随弯曲刚度变化图

7 结论

GMFEM 的建立使有限元技术由刚度固定模型发展到刚度可调节模型, 是有限元技术的一项演变, 将模糊数学和神经网络应用于 GMFEM, 可望实现选择分裂因子的智能化, 将使有限元技术更有效、更实用.

参考文献

1 Courant R, et al. Method of mathematical physics. Interscience, 1953, 1: 25

2 Hellinger E H. der allgemeine ausatz der machanik der kontinua. Encyclopadie der Mathematischen Wissenschaften, Part 4, 1914: 602

3 Reissner B E. On a veriational theorem in elasticity. J Math Phy, 1950, 29: 90

4 荣廷玉, 等. 带参数拉氏乘子法与胡海昌——鹫津久一郎变分原理中三类变量都独立的推证及其它. 西南交通大学学报, 1997, 32(1): 84

5 胡海昌. 论弹性体力学与受范性体力学中的一般变分原理. 物理学报, 1954: 3

6 Washizu K. On the variational principles of elasticity and plasticity. Aeroelastic and Structures Research Laboratory, MIT, Technical Report, 1955. 25

7 钱伟长. 广义变分原理. 多学科学术讲座丛书. 北京: 知识出版社, 1985

8 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1982

9 牛庠均. 现代变分原理. 北京: 北京工业大学出版社, 1992

10 Sander P G. Bornes superieures et inferieures dans l'analyse matricielle des plaques en flexion-torsion. Bull Soc Royale Sciences Liege, 1964, 33: 456

11 荣廷玉. 弹性力学分裂模量变分原理. 西南交通大学学报, 1981, 1: 48

12 荣廷玉. 弹性力学中广义混合变分原理及有限元广义混合法. 固体力学, 1988, 9(2): 153

13 Rong Tingyu. The variational principle with split elastic modulus in elasticity. Advances in Applied Mathematics in China, 1990, 2: 133
14 党发宁，等. 有限元广义混合法在平面有限元病态问题研究中的应用. 西安理工大学学报，1999, 15(4): 25
15 党发宁，等. 薄板有限元广义混合法及克服病态问题研究. 应用力学学报，2000, 17(2): 105
16 党发宁，等. Reissner板问题的有限元广义混合法. 计算力学学报，2000, 17(2): 218
17 Dang Faning, et al. Splitting elastic modulus variational principle for incompressible or nearly incompressible materials and it' s application. Communications in Numerical Methods in Engineering, 2000, 16(9): 649
18 Herrmann L R. Elasticity equations for incompressible and nearly incompressible materials by a variational theorem. AIAA Journal, 1965, 13: 1896

《腾飞之龙——中国古生物专辑》介绍

近年来，中国古生物学家所获得的一系列惊世的古生物化石标本，对探讨生命演化史中几个关键阶段具有重大科学意义，成为国际古生物学研究的一个亮点。在中国所发现的精美化石所揭示的生命起源与演化过程，使得人们不得不对传统的起源演化理论重新做出评估。

为弘扬中国古生物学研究的优秀成果，国家自然科学基金委员会与国际知名期刊《Nature》联合出版了"《腾飞之龙》——中国古生物专辑"中文版，以《自然科学进展》的专刊形式出版，该书的英文版同时由《Nature》杂志与美国芝加哥大学出版社联合出版。

由江泽民主席题写书名的《腾飞之龙》共收录了15篇中国古生物学家首次报道于《Nature》上的原始文章和7篇相关评论。国家自然科学基金委员会马福臣副主任和《Nature》总编 Philip Campbell 博士分别为本书作序。

《腾飞之龙》所描述的化石跨越了近7亿年的地质历史。其中贵州瓮安磷块岩中保存极其精美的胚胎化石，为研究早期(6.7亿年前)动物提供了直接化石证据；云南澄江寒武纪生物群的新发现，给人们呈现出生物多样性的壮丽景观，书中报道的云南虫、海口虫、昆明鱼、海口鱼等非常罕见的珍贵化石，使讨论脊椎动物起源看到了曙光；辽西中生代的生物群展示出地质历史中又一期生物繁茂的壮观图像；书中收集的孔子鸟和几种长羽毛的恐龙化石，是国际学术界极感兴趣的新发现，使鸟类起源于恐龙的假说及鸟类飞行起源找到了直接化石证据。此外，哺乳动物的最接近的共同祖先也从辽西发现的哺乳动物化石中初见端倪。

《腾飞之龙》全书157g铜版纸130页彩色印刷，制作精美。本书内容丰富、通俗易懂，不仅有助于科研人员及科研管理人员了解目前国内外生命起源与演化方面的研究现状，并且也必将极大地丰富读者的相关知识、启发读者对生命起源与演化问题的思考。

本书每册定价60.00元。如需购买请直接与"国家自然科学基金委员会 杂志部办公室"联系。联系人：刘俐，程宇(电话：010－62327204；传真：010－62326921；E－mail：liuli@mail.nsfc.gov.cn，chengyu@mail.nsfc.gov.cn)；通信地址：北京双清路83号(100085)；开户银行：北京海淀工商行北太平庄分理处(账号：0200010009014478025)。

(本刊编辑部)